STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW - 1965 - 001

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"
door

Prof.Dr. T.A. Springer

27 januari 1965

Quaternionen

Het is de bedoeling van deze voordracht, aan te duiden hoe men de quaternionen-algebra's en de toepassingen ervan bij de beschrijving van orthogonale groepen in dimensies 3 en 4 op een moderne manier behandelt.

Notaties en begrippen

(a) k is steeds een commutatief lichaam met karakteristiek $\neq 2$ (Het geval van karakteristiek 2 zou enkele uitweidingen vergen, maar kan verder analoog behandeld worden). k^* is de vermenigvuldigingsgroep van k.

(b) Een kwadratische vorm op een eindig-dimensionale vectorruimte V over k is een afbeelding $Q: V \to k$ met de volgende eigenschappen:

1) $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \quad (\lambda \in k,\ x \in V)$,

2) $Q(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ is bilineair.

Merk op dat $Q(x,x) = 2Q(x)$.

We kunnen op de gebruikelijke manier spreken van loodrechte stand van vectoren: x en y staan loodrecht op elkaar als $Q(x,y) = 0$.

Q heet niet-ontaard als alleen de nulvector loodrecht op alle vectoren staat.

(c) Als $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ een basis is van V en Q is een kwadratische vorm op V, dan is de determinant van de matrix $\left(Q(e_i,e_j)\right)$ niet nul dan en slechts dan als Q niet-ontaard is. Als Q niet-ontaard is, is de klasse $\delta(Q)$ van deze determinant in $k^* / (k^*)^2$ onafhankelijk van de basis (e_i), hij heet de determinant van Q.

(d) Een basis (e_i) van V heet orthogonaal voor de kwadratische vorm Q als $Q(e_i,e_j) = 0$ als $i \neq j$. Zulke bases bestaan.

(e) Twee kwadratische vormen Q op V en Q' op V' heten equivalent, als er een omkeerbare lineaire transformatie t bestaat van V op V' zo, dat $Q'(t(x)) = Q(x)$.

(f) De orthogonale groep $O(Q,V)$ (of $O(Q)$) van de kwadratische vorm Q op V is de groep van de omkeerbare lineaire transformaties t van V met $Q(t(x)) = Q(x)$, zulke t heten orthogonaal (t.o.v. Q). Als t orthogonaal is t.o.v. de niet-ontaarde kwadratische vorm Q, dan is $\det t = \pm 1$. De t waarvoor $\det t = 1$ heten rotaties, ze vormen een normaaldeler $O^+(Q,V)$ (of $O^+(Q)$) van $O(Q,V)$.

1. Quaternionen-algebra's

(1.1) (Definitie). Een quaternionen-algebra over k is een associatieve algebra A over k met de volgende eigenschappen:

(a) A heeft een eenheidselement e,

(b) $\dim A = 4$,

(c) er bestaat een niet-ontaarde kwadratische vorm N op A zo dat

(1) $$N(x,y) = N(x)N(y) \qquad (x,y \in A) .$$

N heet de <u>normvorm</u> van A. Merk op dat $N(e) = 1$.
In plaats van $N(x,y)$ schrijven we (x,y) voor de bij N behorende bilineaire vorm.

We leiden uit (1) eerst enkele andere formules af.

(2) $\qquad (x_1y,x_2y) = (x_1,x_2)N(y), \quad (xy_1,xy_2) = N(x)(y_1,y_2)$,

(3) $\qquad (x_1y_1,x_2y_2) + (x_1y_2,x_2y_1) = (x_1,x_2)(y_1,y_2)$.

De eerste formule (2) volgt uit (1) door daarin x te vervangen door x_1+x_2, de rest gaat analoog.
Uit (3) volgt, door daarin te nemen $x_1 = y_1 = x$, $x_2 = y$, $y_2 = e$ en door de niet-ontaardheid van N te gebruiken, dat

(4) $\qquad x^2 - (x,e)x + N(x)e = 0 \qquad (x \in A)$.

Daaruit vindt men, door x te vervangen door x+y,

(5) $\qquad xy + yx - (x,e)y - (y,e)x + (x,y)e = 0 \qquad (x,y \in A)$.

Stel verder

$$\bar{x} = -x + (x,e)e \ .$$

Dan is volgens (3)

(6) $\qquad (xy,z) = (y,\bar{x}z) = (x,z\bar{y})$.

(waaruit men vindt dat $(\bar{x},\bar{y}) = (x,y)$).
Verder vindt men dan met (4) en (5)

(7) $\qquad x\bar{x} = N(x)e \ , \qquad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

De afbeelding $x \to \bar{x}$ is een involutie van A (d.w.z. een anti-automorfisme met orde 2).

Stel nu $V = \{x \in A \mid (x,e) = 0\}$, dat is een driedimensionale vectorruimte over k.
Stel voor $x,y \in V$

(8) $\qquad xy = -\frac{1}{2}(x,y)e + x \wedge y$.

Dan is $x \wedge y \in V$ (omdat $(xy,e) = -(x,y)$ volgens (6)) en het volgende geldt

$$(9)\quad \begin{cases} x \wedge y = - y \wedge x, & x \wedge x = 0, \\ (x \wedge y, y) = 0, & \\ N(x \wedge y) = N(x)N(y) - \frac{1}{2}(x,y)^2 . & \end{cases}$$

Deze 4 formules volgen resp. uit (5), (4), (2) en (1). Ze laten zien, dat $x \wedge y$ een <u>vectorproduct</u> (of uitwendig product) is van de vectoren x en y in de 3-dimensionale vectorruimte V, behorend bij de restrictie van N tot V.

We kunnen nu de volgende stellingen bewijzen:

(1.2) <u>Twee quaternionen-algebra's over k zijn dan en slechts dan isomorf als hun normvormen equivalent zijn</u>.

(1.3) <u>Een kwadratische vorm N op een vierdimensionale vectorruimte A over k is dan en slechts dan normvorm van een quaternionen-algebra - structuur op A als hij de volgende eigenschappen heeft:</u>

(a) <u>$N(x) = 1$ is oplosbaar met $x \in A$</u>,

(b) <u>$\delta(N) = 1$</u>.

Bewijs van (1.2):

Uit (4) volgt gemakkelijk, dat N door de algebra-structuur van A vastgelegd wordt, waaruit het gedeelte "slechts dan" van (1.2) bewezen is.

We laten nu zien, dat de algebra-structuur van A door N en het eenheidselement e al vastgelegd wordt (op isomorfie na). Neem daartoe een orthogonale basis (e, x_1, x_2, x_3) van A. Uit (4) volgt dat $x_i^2 = - \alpha_i e$, met $\alpha_i = N(x_i)$, uit (5) vinden we $x_i x_j + x_j x_i = 0$ $(i \neq j)$, verder moet, volgens (2) en (6), $x_1 x_2$ loodrecht staan op e, x_1, x_2, zodat $x_1 x_2 = \lambda x_3$. Uit (1) volgt dan, dat $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ een kwadraat is. We kunnen daarna x_3 zo normeren, dat $x_1 x_2 = \alpha_1 \alpha_2 x_3$. Men kan dan echter ook $x_2 x_3$ en $x_3 x_1$ berekenen, het resultaat is bevat in

$$(10)\qquad \begin{array}{l} x_i^2 = -\alpha_i\ ,\quad x_1x_2 = \alpha_1\alpha_2x_3\ ,\quad x_3x_1 = \alpha_3\alpha_1x_2\ , \\ x_2x_3 = \alpha_2\alpha_3x_1\ ,\quad x_ix_j + x_jx_i = 0\quad (i \neq j)\ . \end{array}$$

(We hebben zo de gebruikelijke vermenigvuldigingsregels voor quaternionen-algebra's gevonden). Uit (10) zien we, dat inderdaad e en N de algebra-structuur van A bepalen.
Neem nu aan, dat A en A' twee quaternionen-algebra's zijn over k, waarvan de normvormen N en N' equivalent zijn. Er is dan een omkeerbare lineaire transformatie t van A' op A met $N(t(x)) = N'(x)$. Noem e' het eenheidselement van A', stel $f = t(e')$. Daar $N(f) = 1$, volgt uit (7) dat f een inverse heeft in A (nl. $\bar{f}$). Stel $u(x) = \bar{f}t(x)$. Dan is ook $N(u(x)) = N'(x)$, verder is $u(e') = e$. Uit het eerder bewezene volgt dan dat A en A' isomorf zijn.

Bewijs van (1.3):
Dat (a) nodig is, is duidelijk: $N(e) = 1$. Dat (b) nodig is, hebben we in de loop van het bewijs van (1.2) gezien.
Om te bewijzen dat (a) en (b) voldoende zijn, moeten we een algebra-structuur op A invoeren. Dat kan door een orthogonale basis (e, x_1, x_2, x_3) van A te nemen met $N(e) = 1$ en dan de vermenigvuldiging met (10) te definiëren (dit is de gebruikelijke manier), waarbij nog e als eenheidselement fungeert.
Een mooiere methode is als volgt. Neem eerst een e met $N(e) = 1$ als eenheidselement, noem weer $V = \{ x \in A \mid (x,e) = 0 \}$. Voer dan op V een vectorproduct $x \wedge y$ in dat aan (9) voldoet en definiëer de vermenigvuldiging met (8).
De existentie van een vectorproduct op V is welbekend in het geval dat k het lichaam der reële getallen is met Euclidische metriek. In het algemene geval dat we hier bekijken bestaat het ook.

We vermelden nog enige resultaten van de structuur van quaternionen-algebra's.

(1.4) (a) <u>Als N isotroop is d.w.z. als er een $x \neq 0$ is met $N(x) = 0$, dan is A isomorf met de algebra der 2×2 - matrices over k</u>;

(b) <u>Als $N(x) \neq 0$ voor $x \neq 0$ dan is A een scheef lichaam</u>.

Verder merken we nog op, dat de associativiteit van een quaternionen-algebra al uit de andere in (1.1) gestelde eisen volgt.

2. Verband met orthogonale groepen

Stel dat V een 3-dimensionale vectorruimte is over k, stel dat Q een niet-ontaarde kwadratische vorm is op V. We zijn geïnteresseerd in de orthogonale groep van Q.
Na vervanging van Q door λQ met geschikte $\lambda \in k^*$ kunnen we aannemen dat $\delta(Q) = 1$. De orthogonale groep verandert hierbij niet.
Stel dan $A = k + Q$, definiëer een kwadratische vorm N op A door $N((\lambda,x)) = \lambda^2 + Q(x)$. Volgens (1.3) is er op A een quaternionen-algebra - structuur met normvorm N en uit het bewijs van (1.3) volgt dat we $e = (1,0)$ als eenheidselement kunnen nemen.
Eerst een hulpresultaat.

(2.1) <u>Stel $a \in A$, $N(a) \neq 0$. Definiëer de lineaire transformatie t van A door $t(x) = ax$ of $t(x) = xa$. Dan is $\det t = N(a)^2$</u>.

We hebben $a = -\frac{1}{2}(a,e)e + b$ met $(b,e) = 0$. Twee gevallen:
(a) $N(b) \neq 0$. We nemen dan een orthogonale basis (e,x_1,x_2,x_3) als in (1) met $x_1 = b$. Dan is $a = \alpha + \beta x_1$ en een eenvoudige berekening geeft de bewering.
(b) $N(b) = 0$. Dan is $N(a) = \frac{1}{4}(a,e)^2 \neq 0$ en $t(x) = \frac{1}{2}(a,e)(u(x)+x)$, met $u^2(x) = 0$. Alle eigenwaarden van t zijn dan $\frac{1}{2}(a,e)$, zodat $\det t = \frac{1}{16}(a,e)^4 = N(a)^2$.

(2.2) <u>De rotaties van V zijn de transformaties $t(x) = axa^{-1}$ met $a \in A$, $N(a) \neq 0$</u>.

Dat zo'n t een rotatie is volgt uit (2.1). Neem nu een willekeurige rotatie t. De karakteristieke veelterm van een rotatie heeft een wortel 1 (hij heeft de vorm $X^3 - \alpha X^2 + \alpha X - 1$), t heeft dus een eigenvector x_1. Neem dan een orthogonale basis $\{e, x_1, x_2, x_3\}$, met de vermenigvuldigingsregels (10). Dan is $t(x_2) = \lambda x_2 + \mu x_3$ met $\lambda^2 \alpha_2 + \mu^2 \alpha_3 = \alpha_2$. Een eenvoudige berekening laat dan zien, dat er een $a = \alpha + \beta x_1$ is met $N(a) \neq 0$, $t(x_2)a = ax_2$. Stel $u(x) = a^{-1}t(x)a$. Dan is u een rotatie in V, die x_1 en x_2 vast laat. Dan moet u de identiteit zijn, zodat $t(x) = axa^{-1}$.

Uit (2.2) volgt direct, dat de orthogonale transformaties t van Q de vorm $t(x) = \pm\, axa^{-1}$ hebben ($N(a) \neq 0$).
We zien verder, dat de rotatiegroep $O^+(Q)$ isomorf is met A^* / k^*, waarin A^* de vermenigvuldigingsgroep van A is.
Wanneer V bijv. een driedimensionale ruimte is om het lichaam R der reële getallen, dan volgt hieruit dat $O^+(Q)$ isomorf is met $A_1 / \{1,-1\}$, waarin A_1 de groep der "klassieke" quaternionen is met norm 1.
Als Q isotroop is dan volgt uit (2.2) dat $O^+(Q)$ isomorf is met de groep $PGL_2(k)$ der lineaire transformaties van de projectieve rechte over k.

Stel nu dat Q een kwadratische vorm is op een vierdimensionale vectorruimte A met $\delta(Q) = 1$. We nemen aan dat er een $x \in A$ is met $Q(x) = 1$ (dat kan bereikt worden door scalaire vermenigvuldiging, daarbij verandert $\delta(Q)$ niet). Volgens (2.3) is er dan een quaternionen-algebra - structuur op A met normvorm Q.

(2.3) <u>De orthogonale transformaties t van Q hebben de vorm $t(x) = axb$ of $t(x) = a\bar{x}b$ met $a, b \in A$, $Q(a)Q(b) = 1$. De rotaties zijn die van de eerste soort.</u>

Stel nl. $t(e) = c$, $u(x) = c^{-1}t(x)$. Dan is $u(e) = e$. Uit (2.2) volgt dat $u(x) = b^{-1}xb$ of $u(x) = b^{-1}\bar{x}b$, zodat $t(x) = axb$ ($a\bar{x}b$) met $a = cb^{-1}$. Verder is $Q(c) = 1 = Q(a)Q(b)$. De laatste bewering volgt uit (2.1).

We geven nog kort aan hoe men de vierdimensionale kwadratische vormen Q op V met $\delta(Q) \neq 1$ kan behandelen. Neem dan $\Delta \in \delta(Q)$. $l = k(\sqrt{\Delta})$ is een kwadratische uitbreiding van k, noem σ het niet-identieke automorfisme van l over k.
Stel $A = V \otimes_k l$, σ kan worden uitgebreid tot A (werking op de tweede factor). Q bepaalt een kwadratische vorm N op A. Op A bestaat, volgens (2.3), een quaternionen algebra - structuur. We kunnen zonder bezwaar het eenheidselement e ervan in V nemen. Dan gaat men na (bijv. door een orthogonale basis (e,x_1,x_2,x_3) te nemen van A met $x_1,x_2 \in V$ en de gebruikelijke eigenschappen) dat $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ $(x,y \in A)$.
De rotatiegroep van Q is de ondergroep van de rotatiegroep van N, die bestaat uit de t met $\sigma(t(x)) = t(\sigma(x))$ $(x \in A)$. Nu is volgens (2.3), $t(x) = a x b$ met $a,b \in A$, $N(a)N(b) = 1$. Daaruit vindt men dan

(2.4) $O^+(Q)$ is isomorf met het quotiënt van de groep der paren (a,λ) met $a \in A^*$, $\lambda \in k^*$ zo, dat $N(a)\,\sigma(N(a)) = \lambda^2$, naar de ondergroep der paren $(\xi, \xi\,\sigma(\xi))$ met $\xi \in l^*$.

Toepassing van (2.4):
Q is een niet-ontaarde reële kwadratische vorm met signatuur (3,1). Dan is l het lichaam van de complexe getallen, en men vindt uit (2.4): het quotiënt van de groep der eigenlijke Lorentztransformaties naar zijn centrum (dat orde 2 heeft) is isomorf met de groep der lineaire transformaties van de complexe projectieve rechte.

ZW Rapporten 1965

Auteurs Index